

Cap. I NOȚIUNI FUNDAMENTALE DESPRE VECTORI

În mecanică există **mărimi scalare** sau **scalari** și **mărimi vectoriale** sau **vectori**.

Mărimile scalare (scalarii) sunt complet determinate prin valoarea lor numerică – un număr pozitiv sau negativ – urmată de unitatea de măsură. Exemple: timpul (10 sec.), distanța dintre două puncte (2 m), aria unei suprafețe (25m²), masa (50kg.), temperatura (-10°C), lucrul mecanic (Nm), puterea mecanică (W), energie mecanică (Jouli), etc.

Mărimile vectoriale (vectorii) sunt complet determinate prin modul (mărime sau intensitate), direcție, sens și uneori punct de aplicație sau origine. Exemple: viteza \vec{v} , accelerația \vec{a} , impulsul \vec{H} , momentul cinetic \vec{K} , forța \vec{F} , etc.

Vectorii se notează fie printr-o literă cu o bară deasupra ($\vec{v}, \vec{a}, \vec{F}$), fie prin două litere cu o bară deasupra lor ($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}$), prima literă indicând punctul de aplicație (originea) vectorului, a doua literă extremitatea lui.

De exemplu un vector \overrightarrow{AB} este caracterizat prin următoarele elemente:

- **modulul** (mărimea sau intensitatea) vectorului, $|\overrightarrow{AB}|$, este dat de numărul care reprezintă lungimea segmentului AB;
- **dreapta suport** sau **suportul** vectorului este dreapta determinată de punctele A și B;
- **sensul** vectorului este dat de sensul de parcurs de la A la B;
- **punctul de aplicație** sau **originea** vectorului este punctul A;
- **extremitatea** vectorului este punctul B.

Clasificarea vectorilor în funcție de punctul lor de aplicație:

1°. **Vectori liberi**, la care punctul de aplicație poate ocupa orice poziție în spațiu, menținându-se aceleași: mărimea, direcția și sensul, fără ca efectul vectorului să se modifice. Acești vectori se caracterizează prin modul, direcție și sens. (Exemple: vitezele și accelerațiile unui corp în mișcarea de translație, momentul unui cuplu de forțe.)

2°. **Vectori alunecători**, la care punctul de aplicație se poate deplasa numai pe suportul vectorului, menținându-se același modul și sensul vectorului. Acești vectori se caracteriză prin **modul, direcție, sens și dreapta suport**. (Exemple: forțele aplicate unui corp rigid).

3°. **Vectori legați**, la care punctul de aplicație este bine determinat. Acești vectori se caracterizează prin **modul, direcție, sens și punct de aplicație**. (Exemple: momentele polare, forțele aplicate unui punct material).

Versorul sau **vectorul unitate** este vectorul de modul egal cu unitatea.

- Dacă \vec{u} reprezintă versorul vectorului \vec{F} , adică are modulul egal cu unitatea, aceeași direcție și același sens cu \vec{F} , între vector și versorul său există relațiile:

$$\vec{F} = |\vec{F}| \cdot \vec{u} \text{ sau } \vec{u} = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} \quad (1.1)$$

$$\vec{u} = \text{vers} \vec{F} = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$$

- Prin orientarea sa un versor poate caracteriza direcția și sensul unei axe; axa este o dreaptă pe care se alege un sens pozitiv de parcurs, indicat uneori printr-o săgeată.

Echivalența vectorilor.

Echivalența a doi vectori \vec{F}_1 și \vec{F}_2 se exprimă prin egalitatea:

$$\boxed{\vec{F}_1 = \vec{F}_2} \quad (1.2)$$

Cei doi vectori se numesc **echivalenți** între ei sau **echipolenți**.

Acești vectori sunt caracterizați prin aceleași elemente, egale între ele, în funcție de tipul vectorilor:

- **Doi vectori liberi** sunt echipolenți dacă au:
 - mărimi egale,
 - suporturi paralele,
 - același sens.

Punctul de aplicație al vectorilor nu trebuie precizat deoarece operațiile de adunare și înmulțire între vectori liberi pot fi efectuate în orice punct arbitrar din spațiu.

- **Doi vectori alunecatori** sunt echipolenți dacă au:
 - mărimi egale,
 - suport comun,
 - același sens.

Punctul de aplicație poate fi oriunde pe suportul vectorilor, poziția suportului trebuie să fie precizată.

- **Doi vectori legați** sunt echivalenți între ei dacă au:
 - mărimi egale,
 - suporturi confundate,
 - sensuri identice,
 - același punct de aplicație.

În acest capitol se vor prezenta operațiile cu vectori liberi:

- adunarea (suma)
- scaderea (diferența)

- înmulțirea,
și relații care au la bază aceste operații vectoriale.

Se menționează că nu există noțiunea și operația de împărțire vectorială.

Se mai fac următoarele precizări:

- Toate operațiile ce vor fi definite pentru vectorii liberi vor putea fi extinse și în cazul vectorilor alunecătorii și legați în anumite condiții.
Exp.: operațiile cu vectori legați vor trebui efectuate în punctul comun de aplicație al vectorilor respectivi; operațiile cu vectori alunecători cu suporturile concurente vor trebui efectuate în punctul de concurență al suporturilor.
- În operațiile cu vectori, aceștia vor reprezenta mărimi fizice de același tip.

Adunarea sau suma geometrică a vectorilor.

Suma a doi sau mai mulți vectori este prin definiție un vector obținut prin metodele prezentate în continuare.

Se menționează că definiția pentru suma vectorilor este dată pentru vectorii alunecători cu suporturile concurente (vectorii se construiesc cu punctele de aplicație în punctul de concurență al suporturilor) și pentru vectorii legați în punctul de aplicație comun.

În cazul vectorilor alunecători care nu au suporturile concurente și a vectorilor legați care nu au punctul de aplicație comun, se adună vectorii echipolenți corespunzători iar vectorul sumă obținut se definește ca vector liber.

Suma vectorială a doi vectori \vec{a} și \vec{b} este vectorul $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, care se obține aplicând regula paralelogramului sau regula triunghiului.

Regula paralelogramului (fig. 1.1.a.): se construiește un paralelogram care are ca laturi cei doi vectori \vec{a} și \vec{b} cu punctul de aplicație comun; diagonala care unește punctul de aplicație comun al celor doi vectori cu vârful opus al paralelogramului reprezintă vectorul sumă $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Regula triunghiului (fig. 1.1.b.): vectorul \vec{b} se construiește cu punctul de aplicație în extremitatea vectorului \vec{a} ; suma celor doi vectori este vectorul care unește punctul de aplicație al primului vector cu extremitatea celui de-al doilea vector.

Suma vectorială a trei vectori necoplanari (cu orientări oarecare în spațiu) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ se obține aplicând regula paralelipipedului (fig. 1.1.c.): se construiește un paralelipiped care are drept muchii cei trei vectori cu punctul de aplicație comun. Vectorul sumă $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ este reprezentat de diagonala care unește punctul de aplicație comun al celor trei vectori cu vârful opus al paralelipipedului.

Suma a n vectori, \vec{F}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) se efectuează aplicând **regula poligonului** (se aplică succesiv de mai multe ori regula paralelogramului sau regula triunghiului) (fig. 1.1.d):

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (1.3)$$

În cazul în care extremitatea ultimului vector din poligon coincide cu punctul de aplicație al primului vector, **vectorul sumă** \vec{R} este nul ($\vec{R} = \vec{0}$).

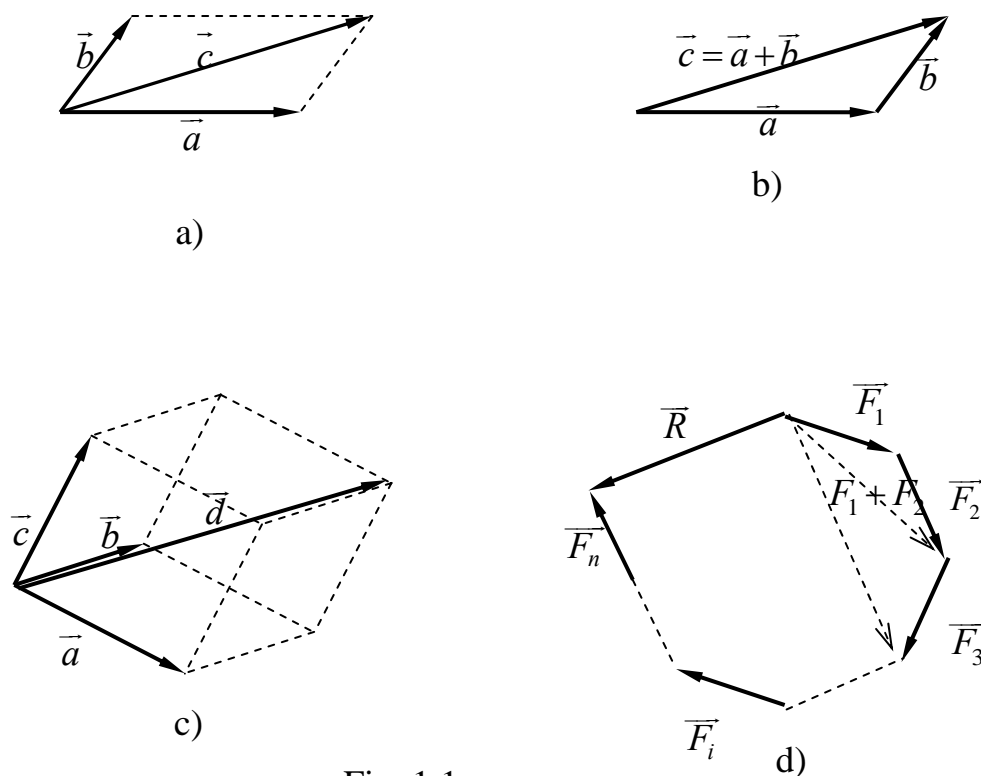


Fig. 1.1

Proprietățile adunării vectorilor

- comutativitatea:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

- asociativitatea vectorilor:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

- asociativitatea cu un scalar:

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} \quad (1.4)$$

- existența unui vector opus:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}.$$

- Existența elementului nul:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}.$$

Modul de definire a sumei vectorilor face posibilă descompunerea unui vector după două direcții necoliniare în plan sau după trei direcții necoplanare în spațiu.

Operația de adunare vectorială a doi vectori intervine și la diferența a doi vectori.

Diferența a doi vectori \vec{a} și \vec{b} este vectorul $\vec{a} - \vec{b}$, care se obține adunând vectorul \vec{a} cu opusul vectorului \vec{b} , aplicând fie regula paralelogramului (fig. 1.2.a), fie regula triunghiului (fig. 1.2.b):

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad (1.5)$$

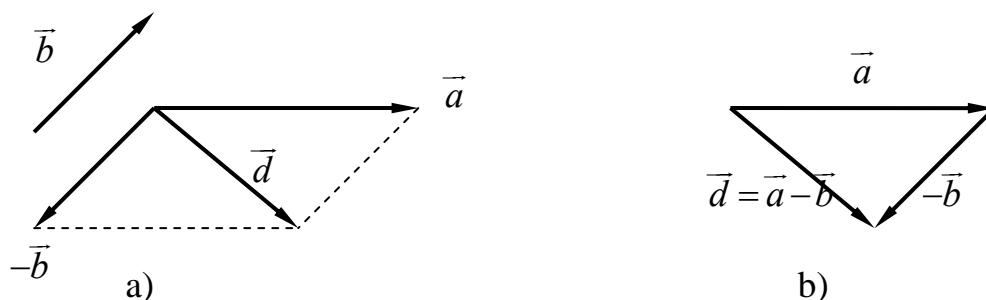


Fig. 1.2

Produsul dintre un vector și un scalar.

Se consideră vectorul \vec{a} și scalarul λ , Prin înmulțirea vectorului \vec{a} cu scalarul λ , se obține un vector $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, cu următoarele caracteristici:

- modulul, $|\vec{b}| = \lambda |\vec{a}|$.
- direcția, aceeași cu a vectorului \vec{a} .
- sensul, același cu a vectorului \vec{a} , dacă $\lambda > 0$, sens contrar dacă $\lambda < 0$

Expresia:

$$\boxed{\vec{b} = \lambda \vec{a}} \quad (1.6)$$

reprezintă relația de coliniaritate a vectorilor \vec{a} și \vec{b} .

Proprietăți:

$$\lambda = 1, \vec{b} = \vec{a}$$

$$\lambda = -1, \vec{b} = -\vec{a} \quad (1.7)$$

$$(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}$$

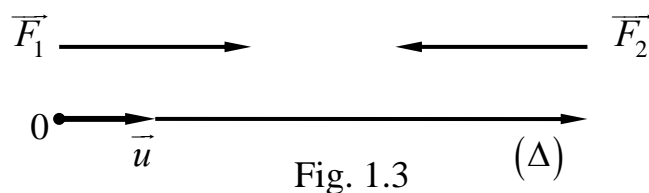
$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}.$$

Mărimea algebrică a unui vector paralel cu o axă.

Se consideră vectorii \vec{F}_1 și \vec{F}_2 paraleli cu axa (Δ) de versorul \vec{u} (fig.

1.3). Intre acești vectori și versorul \vec{u} există următoarele relații:



$$\vec{F}_1 = \lambda\vec{u} \quad \text{sau} \quad \vec{F}_1 = \tilde{F}_1\vec{u} = |\vec{F}_1|\vec{u}, \quad (\lambda > 0)$$

$$\vec{F}_2 = \mu\vec{u} \quad \text{sau} \quad \vec{F}_2 = \tilde{F}_2\vec{u} = -|\vec{F}_2|\vec{u}, \quad (\mu < 0)$$

Pentru un vector $\vec{F} = \tilde{F} \parallel (\Delta)$, de versor \vec{u} , se poate scrie:

$$\boxed{\vec{F} = \tilde{F}\vec{u} = \pm |\vec{F}|\vec{u}} \quad (1.8)$$

unde \tilde{F} este **mărimea algebrică** a vectorului \vec{F} .

Mărimea algebrică a vectorului \vec{F} paralel cu axa (Δ) este egală cu plusmodulul sau minusmodulul vectorului, după cum \vec{F} are același sens cu axa (Δ) sau sens contrar:

$$\tilde{F} = \begin{cases} +|\vec{F}| & \text{pentru } \vec{u} \rightarrow \vec{F} \\ -|\vec{F}| & \text{pentru } \vec{u} \rightarrow \vec{F} \end{cases}$$

Descompunerea unui vector după direcții concurente

Descompunerea unui vector după direcții concurente este operația inversă compunerii vectorilor concurenți și dă o soluție unică în următoarele cazuri:

1°. **Descompunerea unui vector \vec{F} după două direcții coplanare cu vectorul respectiv** (fig. 1.4).

Se descompune vectorul \vec{F} după două direcții coplanare cu el, date de vectorii \vec{a} și \vec{b} , construind un paralelogram pe laturile \vec{a} și \vec{b} , în care vectorul \vec{F} este diagonală.

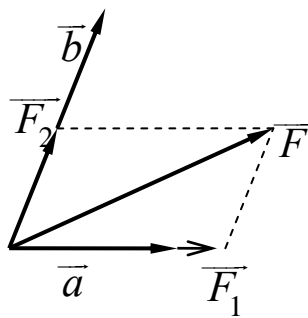


Fig. 1.4

Vectorii \vec{F}_1 și \vec{F}_2 sunt componentele vectoriale ale vectorului \vec{F} ;

\vec{F}_1 este coliniară cu \vec{a} , \vec{F}_2 este coliniară cu \vec{b} , adică:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

și

$$\vec{F}_1 = \lambda \vec{a} ; \vec{F}_2 = \mu \vec{b} ,$$

λ și μ fiind doi scalari.

Se obține expresia vectorială:

$$\boxed{\vec{F} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}} \quad (1.9)$$

care reprezintă **relația de coplanaritate**, între vectorii \vec{a} , \vec{b} și \vec{F} .

2°. Descompunerea unui vector după trei direcții concurente în spațiu:

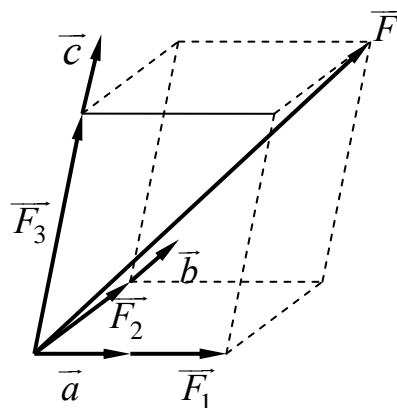


Fig. 1.5

Se descompune vectorul \vec{F} după trei direcții concurente cu el, date de vectorii necoplanari $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, după regula paralelipipedului (fig. 1.5). Se construiește un paralelipiped cu muchiile orientate după vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ în care vectorul \vec{F} este diagonala paralelipipedului (din originea și extremitatea lui \vec{F} se duc plane paralele cu planele determinate de direcțiile $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ luate două câte două).

Componentele vectoriale ale lui \vec{F} sunt dirijate după muchiile paralelipipedului:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

Între componentele lui $\vec{F} \{\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3\}$ și vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ se poate aplica relația (1.6) de coliniaritate:

$$\vec{F}_1 = \lambda \vec{a}; \quad \vec{F}_2 = \mu \vec{b}; \quad \vec{F}_3 = \nu \vec{c}.$$

de unde:

$$\boxed{\vec{F} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}} \quad (1.10)$$

Proiecția unui vector pe o axă.

Se consideră vectorul $\overline{AB} \equiv \vec{F}$ și axa (Δ) de versor \vec{u} (fig. 1.6)

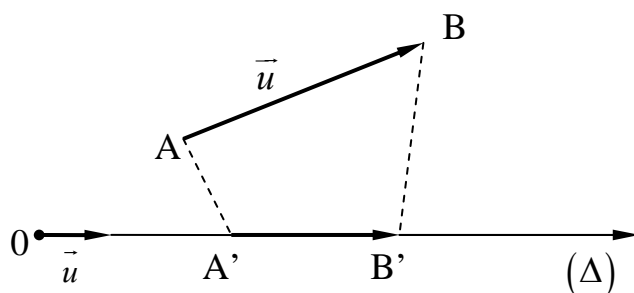


Fig. 1.6

Ducând perpendiculare din extremitățile vectorului \overline{AB} pe axa (Δ) - $AA' \perp (\Delta)$; $BB' \perp (\Delta)$ - se obține pe axa (Δ) vectorul $\overline{A'B'}$, al cărui scalar (sau mărime algebrică) se definește a fi proiecția pe axa (Δ) a vectorului \overline{AB} (sau \vec{F}). Notății: $\text{pr}_{\Delta} \overline{AB}$ respectiv $\text{pr}_{\Delta} \vec{F}$ sau F_{Δ} .

Formula matematică de calculare a proiecției:

$$\text{pr}_{\Delta} \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos \alpha = |\overline{AB}| \cos(\overline{AB}, \vec{u})$$

sau

$$\boxed{F_{\Delta} = |\vec{F}| \cos \alpha = |\vec{F}| \cos(\vec{F}, \vec{u})} \quad (1.11)$$

unde α este unghiul format de vector cu axa de versor \vec{u} .

Proiecția unui vector pe o axă este egală cu produsul dintre mărimea vectorului și cosinusul unghiului format de vector cu axa $(F_{\Delta} = |\vec{F}| \cos \alpha)$.

Proiecția unui vector pe o axă este egal cu produsul scalar dintre vector și versorul axei $(F_{\Delta} = \vec{F} \vec{u})$.

Proiecția unui vector pe o axă este o mărime algebrică al cărui semn depinde de orientarea vectorului față de axă; dacă $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, proiecția este pozitivă, dacă $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, proiecția este negativă iar dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$, proiecția este nulă.

În cazul proiecției vectorului \vec{F} :

$$\text{pentru } \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow F_{\Delta} > 0$$

$$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \rightarrow F_{\Delta} < 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow F_{\Delta} = 0$$

Cazuri particulare în proiecția unui vector pe o axă.

1°. Dacă un vector este paralel cu o axă, atunci vectorul se proiectează în mărime naturală pe acea axă, proiecția este egală cu mărimea lui algebrică, adică cu plus modulul sau minus modulul vectorului după cum acesta are același sens cu axa sau nu ($F_{\Delta} = \tilde{F} = \pm |\vec{F}|$).

În relația (1.10) de calcul a proiecției F_{Δ} ,

$$\text{pentru } \xrightarrow{\vec{u}} \vec{F}, \alpha = 0^{\circ}, \cos 0^{\circ} = 1, F_{\Delta} = |\vec{F}|,$$

$$\text{pentru } \xleftarrow{\vec{u}} \vec{F}, \alpha = \pi, \cos \pi = -1, F_{\Delta} = -|\vec{F}|.$$

2°. Dacă un vector este perpendicular pe o axă, proiecția lui pe acea axă este nulă ($F_{\Delta} = 0$).

În relația (1.11) de calcul a proiecției F_{Δ} ,

pentru $\vec{F} \perp \vec{u}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $F_{\Delta} = 0$.

Expresia analitică a unui vector.

Se consideră vectorul \vec{F} care se proiectează pe axele sistemului cartezian triortogonal drept $(R) \equiv Oxyz$, de versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Proiecțiile vectorului \vec{F} pe axele de coordonate O_x , O_y , O_z sau coordonatele lui în reperul $Oxyz$ sunt F_x , F_y și F_z (fig. 1.7).

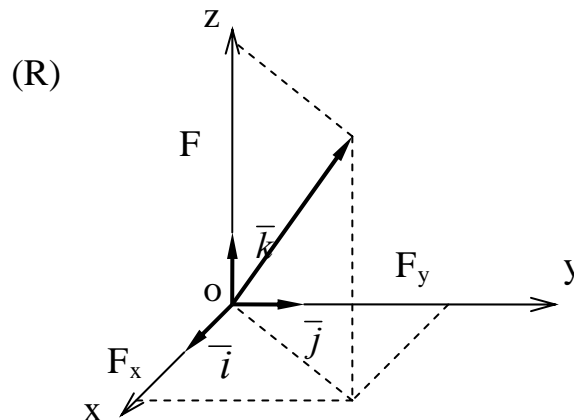


Fig. 1.7

Expresia analitică a vectorului \vec{F} în reperul $Oxyz$ este de forma:

$$\boxed{\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}} \quad (1.12)$$

În cazul plan (fig. 1.8), când $\vec{F} \in Oxy$, expresia analitică este de forma:

$$\boxed{\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}} \quad (1.13)$$

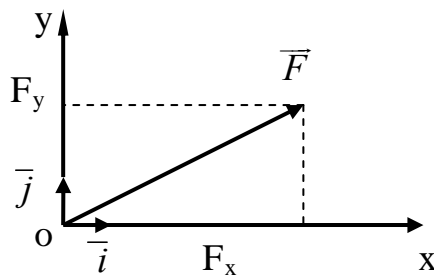


Fig. 1.8

În cazul în care se cunosc proiecțiile vectorului pe axele de coordonate, $\vec{F} \{F_x, F_y, F_z\}$, se vor putea calcula:

- **modulul** vectorului:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (\text{în cazul spațial}) \quad (1.14)$$

și

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (\text{în cazul plan})$$

- **orientarea** lui:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{F}, \vec{i}) &= \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}; \cos(\vec{F}, \vec{j}) = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}; \\ \cos(\vec{F}, \vec{k}) &= \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Expresia analitică a sumei vectorilor

Pentru $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ și $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, vectorul sumă

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ are următoarea expresie analitică:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k} \quad (1.16)$$

În cazul sumei geometrice a n vectori:

$\vec{F}_i \{F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}\} \cdot (i = 1, 2, \dots, n)$, expresia analitică a vectorului sumă \vec{R}

este următoarea:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \left(\sum_{i=1}^n F_{ix} \right) \vec{i} + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy} \right) \vec{j} + \left(\sum_{i=1}^n F_{iz} \right) \vec{k} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k} \quad (1.17)$$

În cazul vectorilor coplanari, $\vec{F}_i \{F_{ix}, F_{iy}\} \cdot (i = 1, 2, \dots, n)$:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \left(\sum_{i=1}^n F_{ix} \right) \vec{i} + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy} \right) \vec{j} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} \quad (1.18)$$

Expresia analitică a diferenței a doi vectori:

Vectorul diferență $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, are următoarea expresie analitică:

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x) \vec{i} + (a_y - b_y) \vec{j} + (a_z - b_z) \vec{k} = d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k} \quad (1.19)$$

Vectorul de poziție (raza vectoare) a unui punct.

Poziția unui punct arbitrar A în reperul $Oxyz$ se poate determina (fig. 1.9):

- **scalar**, prin coordonatele punctului A : x , abscisa, y , ordonata și z , cota;
- **vectorial**, prin vectorul $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$, numit **vector de poziție** sau **rază vectoare**;

acest vector are punctul de aplicație în polul axelor și extremitatea în punctul A .

Proiecțiile vectorului de poziție pe axele de coordonate sunt chiar coordonatele punctului a cărei poziție o determină:

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z.$$

Deci expresia analitică a vectorului de poziție \vec{r} a punctului A este de forma:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (1.20)$$

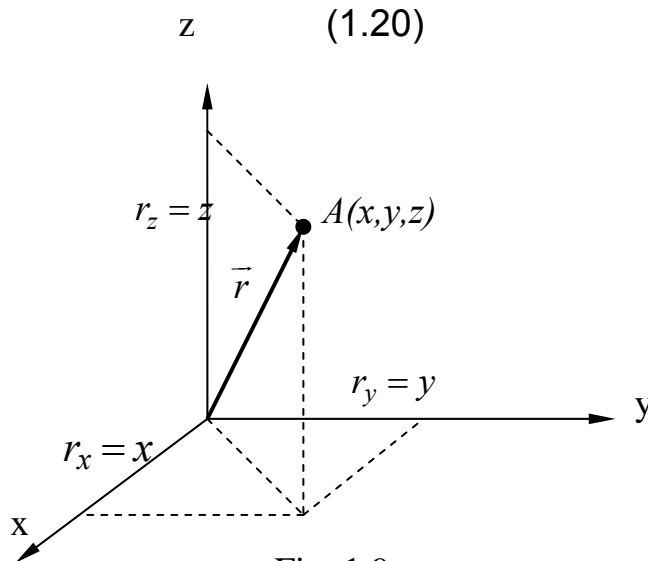


Fig. 1.9

Calculul proiecțiilor unui vector când se cunoaște versorul său.

Metoda se utilizează în cazul în care se cunosc coordonatele a două puncte situate pe suportul vectorului.

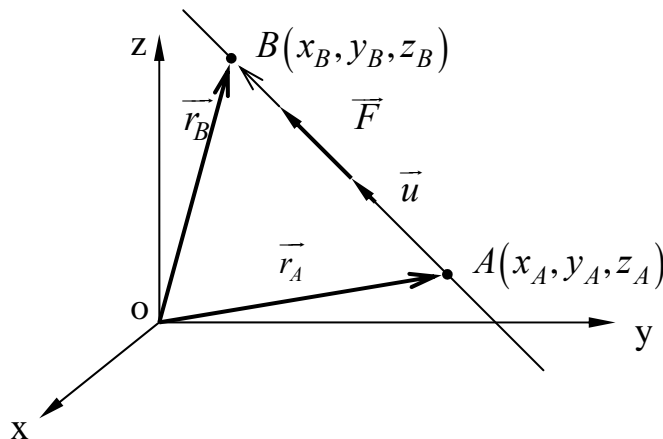


Fig. 1.10

Se consideră vectorul spațial \vec{F} , de mărime cunoscută $|\vec{F}|$, \vec{u} versorul său și coordonatele punctelor $A(x_A, y_A, z_A)$ și $B(x_B, y_B, z_B)$ situate pe suportul vectorului respectiv (fig. 1.10).

Se cunoaște relația între vector și versorul său:

$$\vec{F} = |\vec{F}| \vec{u} \quad (1.21)$$

În relația de mai sus, modulul $|\vec{F}|$ se consideră cunoscut și trebuie să se determine expresia versorului \vec{u} . În fig. 1.10 se observă că \vec{u} este și versorul vectorului delimitat de punctele A și B :

$$\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \vec{u}, \quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \quad (1.22)$$

Se exprimă vectorul \overrightarrow{AB} în funcție de vectorii de poziție ai punctelor A și B :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j} + (z_B - z_A) \vec{k} \quad (1.23)$$

modulul care reprezintă distanța dintre punctele A și B , având expresia:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \quad (1.24)$$

Se obține astfel expresia analitică a versorului \vec{u} :

$$\vec{u} = \frac{(x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j} + (z_B - z_A) \vec{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}} \quad (1.25)$$

care, introdusă în relația (1.20), furnizează expresia analitică a vectorului \vec{F} :

$$\vec{F} = |\vec{F}| \frac{(x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j} + (z_B - z_A) \vec{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}} \quad (1.26)$$

Proiecțiile vectorului \vec{F} pe axe de coordonate vor fi:

$$\begin{aligned} F_x &= |\vec{F}| \frac{x_B - x_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}; \\ F_y &= |\vec{F}| \frac{y_B - y_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}; \\ F_z &= |\vec{F}| \frac{z_B - z_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Produse de vectori.

Produsul scalar a doi vectori.

Produsul scalar a doi vectori \vec{a} și \vec{b} este un scalar s definit prin relația:

$$s = \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}) \quad (1.28)$$

cu

$$(\vec{a},\vec{b}) \leq 180^\circ.$$

În relația (1.28), $\cos(\vec{a},\vec{b})$ indică semnul produsului scalar s ;

Scalarul s este pozitiv, negativ sau nul, după cum unghiul format de cei doi vectori este ascuțit, obtuz sau drept.

În ultimul caz vectorii \vec{a} și \vec{b} sunt ortogonali.

Proprietățile produsului scalar:

1°. Comutativitatea:

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a} \quad (1.29)$$

2°. Asociativitatea în raport cu un scalar:

$$\lambda(\vec{a}\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\lambda\vec{b}) \quad (1.30)$$

3°. Distributivitatea în raport cu suma vectorilor:

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} \quad (1.31)$$

4°. Condiția de ortogonalitate pentru doi vectori \vec{a} și \vec{b} diferiți de zero:

$$\boxed{\vec{a}\vec{b} = 0} \quad (1.32)$$

$$(\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \cos 90^\circ = 0)$$

5°. Produsul scalar a doi vectori este egal cu produsul dintre mărimea unui vector și proiecția celui alt vector pe direcția primului vector:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\text{pr}_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{b}\text{pr}_{\vec{b}}\vec{a} \quad (1.33)$$

6°. În cazul coincidenței celor doi vectori care se înmulțesc scalar ($\vec{a} = \vec{b}$), produsul lor reprezintă pătratul mărimii vectorului:

$$\vec{a}\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2 \quad (1.34)$$

7°. Proiecția unui vector pe o axă este egală cu produsul scalar dintre vector și versorul axei:

$$\vec{a}\vec{u} = |\vec{a}|\cos(\vec{a}, \vec{u}) = a_\Delta \quad (\vec{u}, \text{versorul axei } (\Delta)) \quad (1.35)$$

8°. Calculul unghiului dintre doi vectori \vec{a} și \vec{b} :

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad (1.36)$$

Produsul scalar al versorilor sistemului de axe Oxyz:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

•	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
\vec{i}	1	0	0
\vec{j}	0	1	0
\vec{k}	0	0	1

(1.37)

Expresia analitică a produsului scalar.

Cunoscându-se expresiile analitice ale vectorilor \vec{a} și \vec{b} :

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad \text{și} \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}, \quad (1.38)$$

produsul scalar al celor doi vectori se calculează înmulțind expresiile (1.38) ca două polinoame:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \quad (1.39)$$

ținând cont de produsele scalare ale versorilor date fie de relațiile (1.39), fie din tabela (1.37).

Se obține:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z} \quad (1.40)$$

Produsul scalar a doi vectori este egal cu suma produselor proiecțiilor vectorilor pe aceleași axe.

Cu ajutorul relațiilor (1.40) se pot determina:

- mărimea unui vector în funcție de proiecțiile sale pe axele de coordonate:

$$\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

de unde:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.41)$$

- În baza relației de mai sus se definește versorul unui vector:

$$\vec{i}_a = \text{vers.}\vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \quad (1.42)$$

- Condiția de ortogonalitate a doi vectori $\vec{a} \neq 0$ și $\vec{b} \neq 0$:

$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \quad (1.43)$$

- Expresia unghiului dintre doi vectori \vec{a} și \vec{b} .

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}} \quad (1.44)$$

Produsul vectorial a doi vectori.

Produsul vectorial a doi vectori \vec{a} și \vec{b} este prin definiție un vector $\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b}$ cu următoarele elemente (fig. 1.11):

- direcția este perpendiculară pe planul determinat de cei doi vectori;

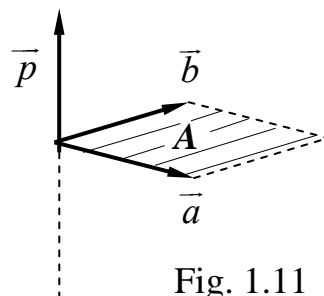
- sensul este astfel încât vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}$ să formeze în această ordine un triedru drept (se aplică regula burghiului drept);
- mărimea este egală cu aria paralelogramului format de vectorii \vec{a} și \vec{b} :

$$|\vec{p}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b}) = A \quad (1.45)$$

Deci produsul vectorial a doi vectori este determinat prin relația:

$$\boxed{\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b}) \vec{i}_p} \quad (1.46)$$

unde \vec{i}_p este versorul lui \vec{p} și $(\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ$.



Proprietățile produsului vectorial:

1°. Anticomutativitatea:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (1.47)$$

2°. Asociativitatea în raport cu un scalar:

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda\vec{b} \quad (1.48)$$

3°.Distributivitatea față de adunarea vectorilor (la dreapta sau la stânga):

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad (1.49)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

4°. Relația de coliniaritate sau paralelism (în cazul vectorilor nenuli, $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$):

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}} \quad (\vec{a} = \lambda \vec{b}) \quad (1.50)$$

$$\left(\sin(\vec{a}, \vec{b}) \begin{cases} \sin 0^\circ = 0 \\ \sin 180^\circ = 0 \end{cases} \right)$$

în cazul vectorilor identici:

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}} \quad (1.51)$$

Produsul vectorial al versorilor sistemului de axe Oxyz

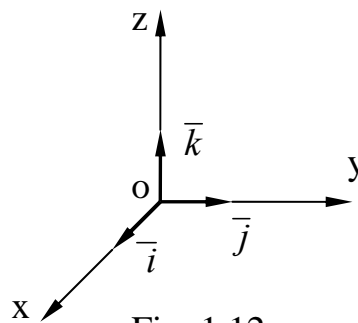


Fig. 1.12

Aplicând definiția produsului vectorial a doi vectori pentru perechile de versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ din fig. 1.12, se obțin următoarele expresii:

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= \vec{0} \quad ; \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad ; \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{j} &= \vec{0} \quad ; \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad ; \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{k} &= \vec{0} \quad ; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad ; \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \end{aligned} \quad (1.52)$$

Adesea produsele vectoriale ale versorilor $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ date de relațiile (1.52) sunt prezentate și sub forma tabelară:

•	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}
\bar{i}	0	\bar{k}	$-\bar{j}$
\bar{j}	$-\bar{k}$	0	\bar{i}
\bar{k}	\bar{j}	$-\bar{i}$	0

(1.53)

Expresia analitică a produsului vectorial.

Cunoscându-se expresiile analitice ale vectorilor \vec{a} și \vec{b} date de relațiile (1.38), produsul vectorial al celor doi vectori se poate calcula în două moduri:

- Se înmulțesc cele două expresii analitice ca două polinoame:

$$\begin{aligned}
 \vec{p} = \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \times (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) = \\
 &= a_x b_x \bar{i} \times \bar{i} + a_x b_y \bar{i} \times \bar{j} + a_x b_z \bar{i} \times \bar{k} + \\
 &+ a_y b_x \bar{j} \times \bar{i} + a_y b_y \bar{j} \times \bar{j} + a_y b_z \bar{j} \times \bar{k} + \\
 &+ a_z b_x \bar{k} \times \bar{i} + a_z b_y \bar{k} \times \bar{j} + a_z b_z \bar{k} \times \bar{k},
 \end{aligned}
 \tag{1.54}$$

se înlocuiesc produsele vectoriale ale versorilor cu rezultatele conținute în tabela (1.53) sau cele din relațiile (1.52), se reduc termenii asemenea, obținându-se în final următoarea expresie analitică a vectorului produs vectorial:

$$\begin{aligned}
 \vec{p} &= (a_y b_z - a_z b_y) \bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \bar{j} + \\
 &= (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k} = p_x \bar{i} + p_y \bar{j} + p_z \bar{k}
 \end{aligned}
 \tag{1.55}$$

- Se dezvoltă după elementele primei linii determinantul de ordinul 3 care conține următoarele elemente:
 - prima linie: versorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$,
 - a doua linie: proiecțiile pe axe ale primului vector din produs $\vec{a}\{a_x, a_y, a_z\}$,
 - a treia linie: proiecțiile pe axe ale celui de-al doilea vector din produs, $\vec{b}\{b_x, b_y, b_z\}$.

$$\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k} =$$

$$= p_x \bar{i} + p_y \bar{j} + p_z \bar{k}$$

Produsul mixt a trei vectori

Produsul mixt a trei vectori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ este prin definiție produsul scalar dintre vectorul \vec{a} și produsul vectorial $\vec{b} \times \vec{c}$:

$$m = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$$

$$m = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a}\vec{p} = |\vec{a}||\vec{p}|\cos(\vec{a}, \vec{p}) = |\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|\sin(\vec{b}, \vec{c})\cos(\vec{a}, \vec{p}) \quad (1.57)$$

unde $(\vec{b}, \vec{c}) \leq 180^\circ$, $(\vec{a}, \vec{p}) \leq 180^\circ$

În relația (1.57), $\cos(\vec{a}, \vec{p})$ indică semnul produsului mixt, adică scalarul m este pozitiv, negativ sau nul, după cum unghiul dintre \vec{a} și \vec{p} este ascuțit, obtuz sau drept. În ultimul caz vectorii din produsul mixt sunt coplanari. Ansamblul de vectori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ luați într-o ordine stabilită, formează un triedru drept sau stâng după cum produsul lor mixt este pozitiv sau negativ.

Ca semnificație geometrică, produsul mixt este egal cu volumul algebric al paralelipipedului construit pe cei trei vectori din produs, aplicați în același punct și considerați drept muchii pentru paralelipiped. (fig. 1.13)

$$m = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a}\vec{p} = \pm V$$

(1.58)

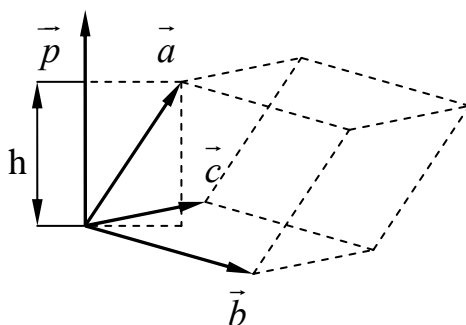


Fig. 1.13

Următoarele relații conduc la afirmația de mai sus:

$$\vec{p} = \vec{b} \times \vec{c}, |\vec{p}| = A \quad (1.59)$$

A fiind aria paralelogramului care are ca laturi vectorii \vec{b} și \vec{c} (fig. 1.13)

$$\vec{a}\vec{p} = |\vec{p}| \text{pr}_{\vec{p}} \vec{a} = A(\pm h) = \pm V \quad (1.60)$$

• proiecția vectorului \vec{a} pe vectorul \vec{p} este înălțimea algebrică $\pm h$ a paralelipipedului (fig. 1.13):

+h, dacă $(\vec{a}, \vec{p}) < 90^\circ$ (ansamblul de vectori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ formează un triedru drept: \vec{a} fiind de aceeași parte cu \vec{p} față de planul definit de \vec{b} și \vec{c}).

-h, dacă $90^\circ < (\vec{a}, \vec{p}) < 180^\circ$ (ansamblul de vectori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ formează un triedru stâng, \vec{a} fiind de partea opusă lui \vec{p} față de planul definit de \vec{b} și \vec{c}).

Relația (1.60) exprimă faptul că volumul algebric $\pm V$ al paralelipipedului din fig.(1.13) este egal cu produsul dintre $A = |\vec{p}|$, aria bazei paralelipipedului și $\pm h = \text{pr}_{\vec{p}} \vec{a}$, înălțimea paralelipipedului normală la bază determinată de \vec{b} și \vec{c} .

Deci, volumul V al paralelipipedului format de vectorii \vec{a}, \vec{b} și \vec{c} este dat de modulul produsului mixt al celor trei vectori:

$$V = |\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})| = |\vec{a}| |\vec{p}| \cos(\vec{a}, \vec{p}) = |\vec{p}| |\text{pr}_{\vec{p}} \vec{a}| = A \cdot h$$

(1.61)

Dacă volumul paralelipipedului este nul, rezultă că vectorii sunt coplanari.

Proprietățile produsului mixt:

1°. Comutativitatea ciclică:

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b}) \quad (1.62)$$

2°. Asociativitatea în raport cu un scalar:

$$\lambda [\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})] = \lambda \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a}(\lambda \vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a}(\vec{b} \times \lambda \vec{c})$$

(1.63)

3°. Distributivitatea față de adunarea vectorilor:

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{a}(\vec{c} \times \vec{d}) + \vec{b}(\vec{c} \times \vec{d}) \quad (1.64)$$

4°. Relația de coplanaritate în cazul vectorilor nenuli:

$$\boxed{\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = 0} \quad (1.65)$$

$$(\vec{p} = \vec{b} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{p} \perp \vec{b}, \vec{p} \perp \vec{c}; \text{ dacă } \vec{a} \cdot \vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{p} \perp \vec{a})$$

Caz particular: dacă doi vectori sunt coliniari sau identici, produsul mixt este nul $(\vec{a}(\lambda \vec{a} \times \vec{b}) = 0 ; \vec{a}(\vec{b} \times \vec{a}) = 0)$.

Expresia analitică a produsului mixt.

Se consideră cunoscute expresiile analitice ale celor trei vectori:

a). Se calculează produsul vectorial $\vec{p} = \vec{b} \times \vec{c}$:

$$\begin{aligned} \vec{p} = \vec{b} \times \vec{c} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = (b_y c_z - b_z c_y) \vec{i} + (b_z c_x - b_x c_z) \vec{j} + (b_x c_y - b_y c_x) \vec{k} = \\ &= p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k} \end{aligned} \quad (1.66)$$

Se calculează produsul scalar $\vec{a} \cdot \vec{p}$:

$$\begin{aligned} m = \vec{a} \cdot \vec{p} &= a_x p_x + a_y p_y + a_z p_z = a_x (b_y c_z - b_z c_y) + \\ &+ a_y (b_z c_x - b_x c_z) + a_z (b_x c_y - b_y c_x) \end{aligned} \quad (1.67)$$

$$b). \quad m = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (1.68)$$

Produsul dublu vectorial a trei vectori:

Produsul dublu vectorial a trei vectori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ este prin definiție un vector \vec{d} egal cu produsul vectorial dintre vectorul \vec{a} și produsul $\vec{b} \times \vec{c}$:

$$\boxed{\vec{d} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})} \quad (1.69)$$

Proprietățile produsului dublu vectorial.

1°. Asociativitatea în raport cu un scalar:

$$\lambda [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})] = \lambda \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \times (\vec{b} \times \lambda \vec{c})$$

(1.70)

2°. Coplanaritatea vectorilor \vec{b}, \vec{c} și \vec{d} , exprimată prin relația ()::

$$\vec{d} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{c} \quad (1.71)$$

(Vectorul \vec{d} este perpendicular pe \vec{a} și $\vec{b} \times \vec{c}$, ceea ce înseamnă că e coplanar cu vectorii \vec{b} și \vec{c}).

3°. Descompunerea produsului dublu vectorial într-o diferență vectorială:

$$\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}} \quad (1.72)$$

Expresia analitică a produsului dublu vectorial.

Se consideră cunoscute expresiile analitice ale celor trei vectori.

a) Se calculează produsul vectorial $\vec{b} \times \vec{c}$:

$$\begin{aligned}\vec{p} = \vec{b} \times \vec{c} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = (b_y c_z - b_z c_y) \vec{i} + (b_z c_x - b_x c_z) \vec{j} + \\ &+ (b_x c_y - b_y c_x) \vec{k} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k} \end{aligned} \quad (1.73)$$

Se calculează produsul vectorial $\vec{a} \times \vec{p}$:

$$\begin{aligned}\vec{d} = \vec{a} \times \vec{p} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = (a_y p_z - a_z p_y) \vec{i} + \\ &+ (a_z p_x - a_x p_z) \vec{j} + (a_x p_y - a_y p_x) \vec{k} = \underline{d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k}}, \end{aligned} \quad (1.74)$$

obținându-se astfel expresia analitică a vectorului \vec{d} .

b). Se aplică relația (1.72) de descompunere a produsului dublu vectorial care se transcrie analitic:

$$\begin{aligned}\vec{d} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c} = \\ &= (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z)(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) - \\ &= (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)(c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}), \end{aligned} \quad (1.75)$$

iar după efectuarea calculelor se obține expresia analitică a vectorului dublu produs vectorial de forma:

$$\vec{d} = d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k} \quad (1.76)$$

*

*

*

În încheiere sunt prezentate două relații cunoscute, consecințe ale operațiilor algebrice definite în acest capitol:

1°. Identitatea lui Poisson.

2°. Identitatea lui Lagrange.

1°. Identitatea lui Poisson.

Fiind dați vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ există următoarea relație:

$$\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}} \quad (1.77)$$

cunoscută sub numele de identitatea lui Poisson.

Relația se verifică ușor aplicând pentru fiecare produs dublu vectorial formula (1.72) de descompunere a unui produs dublu vectorial sub formă de diferență:

$$(\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c} + (\vec{b}\vec{a})\vec{c} - (\vec{b}\vec{c})\vec{a} + (\vec{c}\vec{b})\vec{a} - (\vec{c}\vec{a})\vec{b} = \vec{0} \quad (1.78)$$

2°. Identitatea lui Lagrange.

Identitatea lui Lagrange se exprimă prin următoarea relație:

$$(\vec{a}\vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 \quad (1.79)$$

Prin aplicarea formulelor de definire a produsului scalar (1.28) și a produsului vectorial (1.46), se scriu următoarele relații cunoscute:

$$\begin{aligned} \vec{a}\vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}); & (\vec{a}\vec{b})^2 &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2(\vec{a}, \vec{b}). \\ |\vec{a} \times \vec{b}| &= |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b}); & (\vec{a} \times \vec{b})^2 &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2(\vec{a}, \vec{b}). \end{aligned}$$

$$|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

$$\text{adică } (\vec{a}, \vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \quad (1.80)$$